Gewone differentiaalvergelijkingen
Cursus 2001-2002.
Tweede herhalingstentamen, Vrijdag 30 augustus 2002, duur: 3 uur.

1.[1] Los op (en licht de gevolgde methode toe):
(a)[3] $y'' - 2y' + y = xe^x$ door geschikte keuze van een particuliere oplossing.
(b)[3] $y'' - 2y' + y = x^{-5}e^x$ via variatie van constanten.
(c)[3] $x^2y'' - xy' + y = x\ln x$. Stel een vergelijking op voor $u(t) = y(e^t)$ ofwel $y(x) = u(\ln x) = u(t)|_{t=\ln x}$.

2.[1] (a)[3] Los op $(4xy + 3y^4)dx + (2x^2 + 5xy^3)dy = 0$ met een integrerende factor van de vorm $x^\alpha y^\beta$.
(b)[2] Toon aan dat de functie $f(x, y) = x^3 + y^2$ gedefinieerd op $\mathbb{R}^2$ lokaal Lipschitz continu is in y.
(c)[4] Beschrijf de interatiemethode van Picard en bepaal met behulp van deze methode de oplossing van het beginwaardeprobleem $y' = 2xy$, $y(0) = 1$.

3.[1] Beschouw het systeem

$$(*) \qquad \mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}.$$

(a)[5] Los het systeem op:
(i) Bepaal het fundamentaal systeem $Y(t)$ met $Y(0) = I$ en vervolgens $\mathbf{y}(t)$.
(ii) Schrijf $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Bepaal de differentiaalvergelijking voor x als functie van y en los deze op. (Aanwijzing: de vergelijking is homogeen, stel dus $x = yu(y)$.)
(iii) Laat zien dat de oplossingen in (i) en (ii) met elkaar overeenstemmen.
(b)[4] Schets het faseportret van $(*)$:
(i) Bepaal de stationaire punten en onderzoek hun (asymptotische) stabiliteit.
(ii) Bepaal de lijn van punten waar de oplossingskrommen een vertikale raaklijn hebben.
(iii) Bepaal de helling waarmee de krommen de y-as snijden.
(iv) Schets een aantal krommen en hun doorlooprichting.

4.[1] Zij $u \in C^2[0,1]$, $u(0) = u'(1) = 0$. Beschouw

$$v(x) = -\int_0^x \xi \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} d\xi - x \int_x^1 \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} d\xi.$$

(a)[6] Toon aan op twee manieren aan dat $v(x) = u(x)$: (i) Door partiële integratie. (ii) Door gebruik te maken van de Greense functie voor het randwaardeprobleem $y''(x) = f(x)$ op $[0,1]$, $y(0) = y'(1) = 0$. (Je moet natuurlijk eerst aantonen dat de Greense functie bestaat.)
(b)[3] Toon aan dat $Ly = y''$ op $\operatorname{dom} L = \{y \in C^2[0,1] \mid y(0 = y'(0) = 0\}$ zelfgeadjungeerd is.